HODNOST MATICE

matice A typu $m \times n$,

řádky matice A označíme $r_1, \dots, r_m$

usp. n-tice $r = a_1 r_1 + \dots + a_m r_m$ se nazývá LINEÁRNÍ KOMBINACE řádků $r_1, \dots, r_m$ s koeficienty $a_1, \dots, a_m \in P$.

Řádky $r_1, \dots, r_m$ jsou LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ, jestliže platí

$$a_1 r_1 + \dots + a_m r_m = 0 \Rightarrow a_1 = \dots = a_m = 0$$

Řádky, které nejsou lin. nezávislé, nazýváme LINEÁRNĚ ZÁVISLÉ.

Př.: $r_1 = (1 \ -1)$, $r_2 = (-1 \ 1)$

$$r_1 + r_2 = (0 \ 0)$$

lin. závislé

Př.: $r_1 = (1 \ 0)$, $r_2 = (0 \ 1)$ lin. nezávislé

$$a_1 r_1 + a_2 r_2 = a_1 (1 \ 0) + a_2 (0 \ 1) = (0 \ 0)$$

$$(a_1 \ 0) + (0 \ a_2) = (a_1 \ a_2) = (0 \ 0)$$

Definice HODNOST matice A (ozn. rank A) je maximální počet lin. nezávislých řádků matice A.

Př.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$a_1 (1\ 1\ 1) + a_2 (0\ 1\ 1) = (0\ 0\ 0)$$

$$(a_1 \quad a_1 + a_2 \quad a_1 + a_2) = (0\ 0\ 0)$$

$\Rightarrow a_1 = a_2 = 0 \Rightarrow r_1, r_2$ lin. nezávislé

$$a_1 (1\ 1\ 1) + a_2 (0\ 1\ 1) + a_3 (2\ 1\ 1) =$$
$$= (a_1 + 2a_3 \quad a_1 + a_2 + a_3 \quad a_1 + a_2 + a_3) = (0\ 0\ 0)$$

$a_1 = 2,\ a_2 = -1,\ a_3 = -1$ $\quad r_1, r_2, r_3$ lin. závislé!

$$\Rightarrow \text{rank } A = 2$$

Tvrzení Elementární řádkové úpravy nemění hodnost matice.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \text{---} \\ 0 & 1 & 0 & \text{---} \\ 0 & 0 & 1 & \text{---} \\ 0 & 0 & 0 & 0\ 0 \end{pmatrix}$$

Tvrzení Pokud matice A je řádkově ekvivalentní matici B ve schodovitém tvaru, potom rank A = rank B a to je rovno počtu nenulových řádků v matici B.

Důsledek rank A = rank A^T

<u>Definice</u> Čtvercová matice, jejíž hodnost je rovna počtu řádků, se nazývá REGULÁRNÍ. Matice, která není regulární, se nazývá SINGULÁRNÍ.

<u>Tvrzení</u> Každá regulární matice je řádkově ekvivalentní jednotkové matici.

<u>Tvrzení</u> Násobení regulární maticí nemění hodnost.

DETERMINANT

Definice Buď A čtvercová matice typu $n \times n$ nad polem P. Položme

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{1\sigma_1} \cdot \ldots \cdot A_{n\sigma_n}.$$

Prvek $\det A \in P$ se nazývá DETERMINANT matice A.

$$\det A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

Př.: 1) $n = 1$ $\quad id: \{1\} \longrightarrow \{1\}$

$A = (A_{11})$ $\quad \det A = \operatorname{sgn} id \cdot A_{11} = A_{11}$

2) $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \qquad \{1,2\} \longrightarrow \{1,2\}$$

$(1\ 2), (2\ 1)$

sgn 1 $\quad -1$

$$\det A = 1 \cdot A_{11} \cdot A_{22} + (-1) A_{12} \cdot A_{21} = A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}$$

3) $n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \qquad \{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3\}$$

6 permutací

$$\det A = A_{11} A_{22} A_{33} + A_{12} A_{23} A_{31} + A_{13} A_{21} A_{32} - A_{11} A_{23} A_{32} - A_{13} A_{22} A_{31} - A_{12} A_{21} A_{33}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} + & A_{11} & A_{12} & A_{13} & - \\ + & A_{21} & A_{22} & A_{23} & - \\ + & A_{31} & A_{32} & A_{33} & - \\ & A_{11} & A_{12} & A_{13} & \\ & A_{21} & A_{22} & A_{23} & \end{array}$$

Sarrusovo pravidlo.

4) $n \geq 4$

Tvrzení Je-li některý řádek matice A nulový, $\det A = 0$.

<u>Tvrzení</u> Jsou-li některé dva řádky matice A stejné, $\det A = 0$.

<u>Tvrzení</u> 1) Přičtením c-násobku j-tého řádku k i-tému se determinant nemění.

2) Vynásobením i-tého řádku prvkem $c \in T$ se determinant vynásobí prvkem c.

3) Výměnou i-tého a j-tého řádku determinant změní znaménko.

<u>Tvrzení</u> $\det E = 1$

<u>Tvrzení</u> $\det A = \det A^T$

<u>Tvrzení</u> Matice ve schodovitém tvaru má determinant roven součinu prvků na diagonále.

$$\det A = c_1 \det A_1 = c_2 c_1 \det A_2 = \dots =$$

$$= c_1 \dots c_k \det \underbrace{A_k}_{\text{schodovitý tvar}}$$

<u>Tvrzení</u> Determinant součinu je součin determinantů.

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

<u>Tvrzení</u> Matice je regulární právě tehdy, když její determinant je různý od nuly a to je právě tehdy, když je to matice invertibilní.